

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI" etapă locală – 21 februarie 2016

CLASA A IX-A
Filiera tehnologică-Profil tehnic
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

a) Din $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow (x+y) \geq 2\sqrt{xy}$

$$\frac{z+t}{2} \geq \sqrt{zt} \Rightarrow (z+t) \geq 2\sqrt{zt}$$

Deci $(x+y)(z+t) \geq 4\sqrt{xyzt} \dots \dots \dots (1 \text{ punct})$

$$2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{zt}\right) = 2\left(\frac{zt+xy}{xyzt}\right) \geq \frac{2}{xyzt} \cdot 2 \cdot \sqrt{xyzt} = \frac{4}{\sqrt{xyzt}} \dots \dots \dots (1 \text{ punct})$$

Finalizare: $(x+y)(z+t) + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{zt}\right) \geq 4\sqrt{xyzt} + \frac{4}{\sqrt{xyzt}} = 4\left(\sqrt{xyzt} + \frac{1}{\sqrt{xyzt}}\right) \geq 4 \cdot 2$
 $= 8 \dots \dots \dots (1 \text{ punct}).$

b) se aduce relația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ la același numitor și obținem

$$yz + xz + xy = 0 \dots \dots \dots (1 \text{ punct})$$

aducem la același numitor și relația $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$ obținând:

$$S = \frac{(yz)^3 + (xz)^3 + (xy)^3}{x^2y^2z^2} \dots \dots \dots (1 \text{ punct})$$

$$yz = -(xz + xy) = -x(z + y)$$

$$(yz)^3 = -x^3(y+z)^3 = -x^3y^3 - 3x^3y^2z - 3x^3yz^2 - x^3z^3 \dots \dots \dots (1 \text{ punct})$$

$$\text{înlocuind în } S \text{ vom obține: } S = \frac{-x^3y^3 - 3x^3y^2z - 3x^3yz^2 - x^3z^3 + x^3z^3 + x^3y^3}{x^2y^2z^2} = \frac{-3x(y+z)}{yz}$$

$$= \frac{-3(xy+xz)}{yz} = \frac{-3(-yz)}{yz} = 3 \dots \dots \dots (1 \text{ punct})$$

SUBIECTUL II

a) Din calcul direct rezultă egalitatea. (1 punct)

b) Folosind egalitatea de la punctul anterior vom obține:

$$S = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \dots \dots \dots (2 \text{ puncte})$$

b) Se aplică metoda inducției matematice .

I-Se verifică pentru $n=1$ că egalitatea este adevărată... (1 punct)

II- Se presupune $P(k)$ adevărată și se demonstrează că $P(k+1)$ este adevărată.

$$\text{Avem: } P(k+1): \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2 \cdot k + 1}{k^2 \cdot (k+1)^2} + \frac{2 \cdot k + 3}{(k+1)^2 (k+2)^2} =$$

$$\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} + \frac{2 \cdot k + 3}{(k+1)^2 (k+2)^2} = \frac{k^4 + 6k^3 + 12k^2 + 10k + 3}{(k+1)^2 (k+2)^2} \dots (1 \text{ punct})$$

$$\text{descompunerea } k^4 + 6k^3 + 12k^2 + 10k + 3 = (k+1)^3 (k+3) \dots (1 \text{ punct})$$

Finalizare ... (1 punct)

SUBIECTUL III

$$x + y + z = 26$$

$$y^2 = xz \dots (1 \text{ punct})$$

$$y + 4 = \frac{x+z}{2} \dots (1 \text{ punct})$$

$$2y + 8 + y = 26 \Rightarrow y = 6 \dots (1 \text{ punct})$$

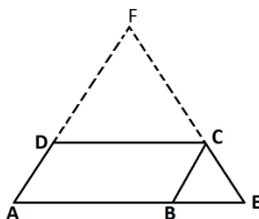
Deci $x + z = 20$ și $xz = 36$ de unde rezultă $x = 2$ și $z = 18$ sau $x = 18$ și $z = 2 \dots$

... (2 puncte)

$$\text{Finalizare: } 2^2 + 6^2 + 18^2 = 364 \dots (2 \text{ puncte})$$

SUBIECTUL IV

desen... (1 punct)



$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD} \dots (2 \text{ puncte})$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \dots (2 \text{ puncte})$$

$$\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{CF} \text{ coliniari} \Leftrightarrow (\exists) \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \text{ astfel încât } \overrightarrow{CF} = \alpha \overrightarrow{EC} \dots (1 \text{ punct})$$

$$2\overrightarrow{EC} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$$

Deci punctele C, E, F sunt coliniare... (1 punct).